МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕКРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических занятий
по ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности

15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования

Краснодар
2019

Рассмотрена
на заседании цикловой методической комиссии
____

Протокол от «____»______20___г. №___

Председатель_________
/З.З.Хашханокова

Утверждаю
Заместитель директора по учебной работе
ГБПОУ КК «КМТ»
_________________________/Ж.Г.Рувина/

«_____»_____________ 20___ г.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий предназначены для закрепления теоретических знаний и приобретение необходимых практических навыков и умений по программе учебной дисциплины ЕН.01 МАТЕМАТИКА, составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой ЕН.01 МАТЕМАТИКА по специальностям технического профиля среднего профессионального образования 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования

Организация разработчик: - государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края «Краснодарский монтажный техникум»

Составитель : Егорова Лариса Валерьевна, преподаватель математики ГБПОУ КК «КМТ»

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебной дисциплинеЕН.01 МАТЕМАТИКА составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальностям технического профиля 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования

В соответствии с рабочей программой ЕН.01 МАТЕМАТИКА на изучение учебной дисциплины предусмотрено 64 часов, из которых 26 часов на проведение практических занятий.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Задачи:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знания по конкретным темам;
- формирование умения применять полученные знания на практике;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь: анализировать сложные функции и строить их графики; выполнять действия над комплексными числами; вычислять значения геометрических величин;
производить операции над матрицами и определителями; решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления; решать системы линейных уравнений различными методами.

Перечень практических занятий

Наименование раздела (темы)	Практическое занятие	Содержание практического занятия	Кол-во часов
Раздел 1 Геометрические величины	**Практическое занятие №**1 Площади поверхностей и объемы многогранников	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие№2 Объемы и площади поверхностей тел вращения.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 2 Элементы линейной алгебры	**Практическое занятие №3** Действия над матрицами	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №4 Вычисление определителей	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №5 Решение систем уравнений	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 3 Элементы математического анализа	**Практическое занятие №6** Чтение графиков функций	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №7 Построение графиков сложных функций	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых	2

		примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	
Раздел 4 **Основы дифференциального исчисления**	**Практическое занятие №8** Нахождение производных	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №9 Вычисление производных высших порядков	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие № 10 Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 5 **Основы интегрального исчисления**	**Практическое занятие №11** Нахождение неопределенных интегралов	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
	Практическое занятие №12 Вычисление площадей плоских фигур	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Раздел 6 **Основы теории комплектных чисел**	**Практическое занятие №13** Действия над комплексными числами.	1.Изучение теоретического материала 2.Разбор типовых примеров и задач 3. Решение задач для самостоятельной работы	2
Итого			26

Критерии оценки

Отметка 5– «отлично» выставляется, если студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практического занятия, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы.

Отметка 4– «хорошо» выставляется, если студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении экспериментальных заданий и расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы.

Отметка 3– «удовлетворительно» выставляется, если студент в целом освоил материал практического занятия, но затрудняется с выполнением всех заданий, ответил не на все контрольные вопросы.

Отметка 2– «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практического занятия, не может самостоятельно выполнить задания, не раскрыл содержание контрольных вопросов.

Практическое занятие 1

1.Название темы Площади поверхностей и объемы многогранников
2.Учебные цели: отработка навыков вычисления площади поверхностей и объемов многогранников
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

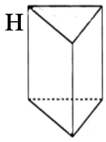
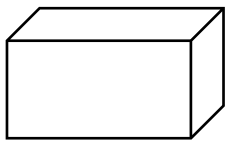
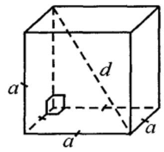
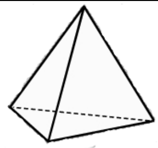
1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

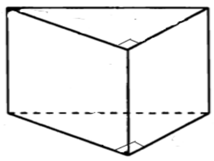
1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2 Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3 После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Многогранник – это геометрическая фигура, состоящая из конечного числа многоугольников. *Площадь поверхности* многогранника равна сумме площадей всех его граней. *Объемом* называют часть пространства, заключенного внутри поверхности.

Название	Призма	Параллелепипед	Куб	Пирамида
Рисунок				
Площадь боковой поверхности	$S_{бок}=P_{осн}\cdot H$ Н- высота	$S_{бок}=2(a+в)\cdot c$ *а*-длина, *в*- ширина, *с* -высота	$S_{бок}=4a^2$	$S_{бок}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot L$ L-апофема
Площадь поверхности	$S_{пов}=2S_{осн}+S_{бок}$	$S_{пов}=2(ав+ас+вс)$	$S_{пов}=6a^2$	$S_{пов}=S_{осн}+S_{бок}$
Объем	$V=2S_{осн}\cdot H$	$V=a\cdot в\cdot c$	$V=a^3$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$

Задача 1. Дана призма прямая. Основание – прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Н = 10см. Найти $S_{бок}$, $S_{полн}$, V.



Решение.

1). Находим площадь основания по формуле $S=\frac{1}{2}ab$, $S=\frac{1}{2}6*7=21$

2). Находим периметр основания по формуле
$P=a+b+c$ *(сумма длин сторон основания)*,
P= 6+8+10= 24

3). $S_{бок}=P_{осн}\cdot H$; $S_{бок}$= 24*10=240

4). $S_{полн}=S_{бок}+2\cdot S_{осн}$; $S_{полн}$ = 42+240= 282

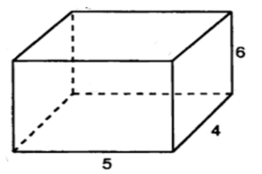
5). $V=S_{осн}\cdot H$; V = 21*10= 210

Ответ. $S_{бок}$=240, $S_{полн}$= 282, V =210.

Задача 2.

Параллелепипед прямоугольный.

Найти $S_{бок}$, $S_{полн}$, V.



Решение.

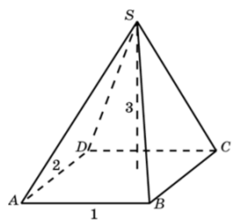
1). $S_{бок}=P_{осн}\cdot H$; $S_{бок}$ = 2(5+4)*6=108

2). $S_{полн}=S_{бок}+2\cdot S_{осн}$; $S_{полн}$= 2*(5*4)+ 108= 148

3). $V=S_{осн}\cdot H$; V = 5*4*6= 120

Ответ. $S_{бок}$=108, $S_{полн}$= 148, V =120.

Задача 3. Найдите объем пирамиды, высота которой 3, а в основании - прямоугольник со сторонами 1 и 2.



Решение.

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$; V =$\frac{1}{3}$(1*2)*3= 2

Ответ. V =2.

Задания для самостоятельного решения

1.Нужно без применения техники вырыть в глинистой почве прямую канаву в 360м длины и 1,5м глубины; ширина канавы вверху 4м, у дна 2м.

2. Определить объем траншеи длиной 160м для прокладки канализационной трубы, если глубина траншеи в начале участка 1,4м, а в конце 2,0м. Ширина траншеи по ее дну 0,7м. Крутизна откосов 1:m = 1:0 (т.е. откосы перпендикулярны дну).

3. Длина, ширина и высота комнаты равны 4м, 3м и 2,6м. Найдите кубатуру комнаты.

4.Требуется установить резервуар для воды ёмкостью 10 $м^3$ на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

5.Три латунных куба с рёбрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?

6.Сколько весит полуметровый слой снега на квадратной площадке со стороной 10м, если $1м^3$ снега весит в среднем 15кг?

7.В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.

8.Дана четырехугольная пирамида с высотой $H = 4$см. В основании прямоугольник 6см $\times$ 8см. Найти $S_{бок}$, $S_{полн}$, V .

Контрольные вопросы

1.Что называется многогранником?
2.Какой многогранник называется призмой, параллелепипедом, пирамидой?
3.Запишите формулы для нахождения площади поверхности и объема призмы, пирамиды.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 2

1.Название темы Объемы и площади поверхностей тел вращения.
2.Учебные цели: отработка навыков вычисления площади поверхностей и объемов тел вращения
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

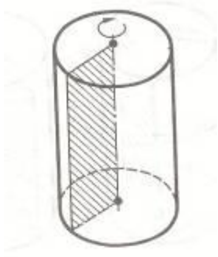
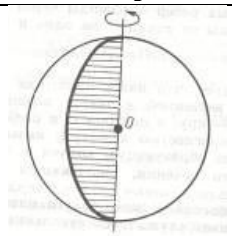
1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Тела вращения – геометрические тела, образованные вращением плоской фигуры около оси вращения.

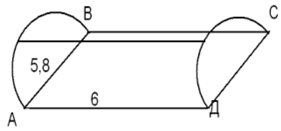
Название	**Цилиндр**	**Конус**	**Шар**
Рисунок			
Вращающаяся плоская фигура	Прямоугольник	Прямоугольный треугольник	Полукруг
Ось вращения	Сторона прямоугольника	Катет	Диаметр
Площадь основания	$S_{осн} = \pi R^2$	$S_{осн} = \pi R^2$	-
Площадь боковой поверхности	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{бок} = \pi RL$	-
Площадь поверхности	$S_{пов} = 2\ S_{осн} + S_{бок}$	$S_{пов} = S_{осн} + S_{бок}$	$S_{пов} = 4\ \pi R^2$
Объем	$V = S_{осн} * H$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} * H$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Задания для самостоятельного решения

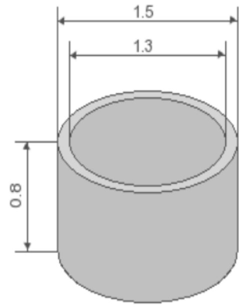
1.Сколько краски потребуется для наружной окраски цилиндрической трубы длиной 2 м, внешний диаметр которой равен 50 см, если на окраску 1 $м^2$ поверхности расходуется 200 г краски.

2.Вычислите площадь листа жести, если из него изготовлена труба длиной 8м и диаметром 32 см.

3.Полуцилиндрический свод подвала имеет 6м длины и 5,8м. в диаметре. Найдите полную поверхность подвала.



4.Цилиндрическая колода для рубки мяса имеет в окружности 3м, в высоту 1,25м. Сколько она весит, если 1$см^3$ ее материала вести 0,8г?



5.Найти объем бетона для бетонного кольца высотой 0,8м, внешним диаметром 1,5м, внутренним диаметром 1,3м.

6. Высыпанная куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2м, а образующая 2,5 м. Найдите объем высыпанного щебня.

7.Резервуар для нефти имеет форму цилиндра с конусом сверху. Радиус основания резервуара равен 6м, высота цилиндра равна 5 м, а образующая конуса 7,5 м. Определить поверхность резервуара.

8.Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 2м и 6м. Найдите диаметр нового шара.

9.Сколько краски пойдет на покраску полушарового (так называемого «римского») купола, окружностью 30м? На покраску 1$м^2$ идет 250г краски

10.Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания и равна 2м, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

Контрольные вопросы

1.Что называется телом вращения?
2.Сформулируйте определения цилиндра, конуса, шара.
3. Что является поверхностью шара?
3.Запишите формулы для нахождения площади поверхности и объема цилиндра, конуса, шара.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 3

1.Название темы Действия над матрицами
2.Учебные цели: выполнять действия над матрицами
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо элементов, состоящая из *m* строк и *n* столбцов. В качестве элементов мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. *ЭЛЕМЕНТ* – это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами *A, B, C*…

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} \text{-элементы матрицы}$$

Действия с матрицами
1) *Умножение* матрицы на число (каждый элемент умножается на это число)
Пример:

$$3\cdot\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 12 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

2) *Транспонирование* матрицы

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.
Пример:
Транспонировать матрицу $D = (7 \quad 3 \quad -12 \quad 0 \quad 34)$.

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

3) *Сумма (разность*) матриц.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F+G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3 \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов**.**

4) *Умножение* матриц.

Чтобы матрицу *P* можно было умножить на матрицу *S* необходимо, чтобы число столбцов матрицы *P* равнялось числу строк матрицы *S*.

Пример:

$$PS = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot3+8\cdot4-4\cdot9 & 5\cdot2+8\cdot(-1)-4\cdot6 & 5\cdot5+8\cdot3-4\cdot5 \\ 6\cdot3+9\cdot4-5\cdot9 & 6\cdot2+9\cdot(-1)-5\cdot6 & 6\cdot5+9\cdot3-5\cdot5 \\ 4\cdot3+7\cdot4-3\cdot9 & 4\cdot2+7\cdot(-1)-3\cdot6 & 4\cdot5+7\cdot3-3\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

Внимание! Понятия квадрата матрицы не существует!
Если для матрицы А необходимо вычислить $А^2$, то это означает, что необходимо выполнить действие А*А.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти значение матричного многочлена *2A + 3B*, если:

1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3	$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 2. Найти *A*B*.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.
2. Перечислите действия с матрицами.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 4

1.Название темы Вычисление определителей
2.Учебные цели: научить вычислять определители второго и третьего порядка
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Любой квадратной матрице *n -го* порядка можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем*(*детерминантом)* матрицы А. На практике чаще всего можно встретить определитель второго порядка. Обозначения: Если дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, то ее определитель

обозначают $|A|$. Также очень часто определитель обозначают латинской буквой D или греческой Δ.

Определителем второго порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

где a_{ij} – элементы определителя.

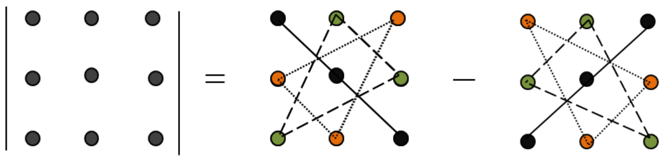
ij - двойной индекс.

i– номер строки, а j– номер столбца на пересечении которых находится элемент.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 20 + 6 = 26$.

Определителем третьего порядка называется число (правило треугольников)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$



Пример 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot(-3)\cdot4 + 0\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot3\cdot4 - 0\cdot2\cdot5 - (-3)\cdot(-2)\cdot1 =$$

$$= 15 - 24 + 0 + 12 - 0 - 6 = -3$$

Минором M_{ik} элемента a_{ik} определителя Δ называется определитель порядка на единицу меньше, который получается из данного определителя, если вычеркнуть ту строку и тот столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ik} (i-я строка и k-й столбец).

Пример 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Найдем M_{12}. *Мысленно вычеркиваем* $1-$*ю строку и* $2-$*й столбец, получаем* :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 - (-12) = 12$$

Найдем M_{33}. *Мысленно вычеркиваем* $3-$*ю строку и* $3-$*й столбец, получаем* :

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$$

Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} определителя Δ называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$$

Пример 4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Найдем A_{12}.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 5 - (-3) \cdot 4) = -12$$

Найдем A_{33}.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

Вычисление определителей 3-го порядка (метод разложения по строке или столбцу)

Берутся элементы какого-либо одного столбца или строки. Каждый элемент умножается на свое алгебраическое дополнение и потом все это суммируется.

Пример 5.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (\textit{разложение по } 1 - \textit{му столбцу}) = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (15 - 6) + 4 \cdot (-6 - (-3)) = 9 - 12 = -3.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание. Вычислить определители второго и третьего порядков

1. а) $\begin{vmatrix} -16 & 35 \\ 20 & 102 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 66 & -20 & 32 \\ -1 & 24 & 1 \\ 30 & -2 & 12 \end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix} 11 & -33 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 13 & -40 & 3 \\ 29 & -2 & 4 \\ 32 & 23 & -12 \end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix} 5 & -30 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 25 & -20 & 5 \\ 10 & -15 & 35 \\ -40 & 45 & -50 \end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix} 40 & -20 \\ 16 & 12 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 60 & -24 & 18 \\ 48 & -12 & 36 \\ 42 & 54 & -66 \end{vmatrix}$

5. а) $\begin{vmatrix} 48 & -80 \\ 16 & -24 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 64 & -32 & 40 \\ -56 & 72 & 36 \\ 63 & 45 & 88 \end{vmatrix}$

6. а) $\begin{vmatrix} -37 & 13 \\ 23 & 17 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 29 & 31 & -11 \\ 39 & 52 & 38 \\ -16 & 49 & -81 \end{vmatrix}$

Контрольные вопросы

1 Дайте определение определителя матрицы

2 Перечислите правила вычисления определителей второго и третьего порядков

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 5

1.Название темы Решение систем уравнений

2.Учебные цели: научить решать системы уравнений методом Крамера и Гаусса

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Метод Крамера

Если система из n линейных уравнений с n неизвестными имеет определитель D матрицы A (составленной из коэффициентов при неизвестных) не равный нулю, то ее решение дают формулы Крамера : $x_k = \frac{D_k}{D}$, где к= 1,2,…, n.

Для того чтобы выполнить данное задание нужно уметь раскрывать определители «два на два» и «три на три».

Пример . Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=-18+2-44=-60\neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1=\begin{vmatrix}21 & -2 & 4\\ 9 & 4 & -2\\ 10 & -1 & -1\end{vmatrix}=21\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}9 & -2\\ 10 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}9 & 4\\ 10 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=21\cdot(-4-2)+2\cdot(-9+20)+4\cdot(-9-40)=-126+22-196=-300$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-300}{-60}=5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 21 & 4\\ 3 & 9 & -2\\ 2 & 10 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}9 & -2\\ 10 & -1\end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 9\\ 2 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=33-21+48=60$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 21\\ 3 & 4 & 9\\ 2 & -1 & 10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & 9\\ -1 & 10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ -1 & 10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ 4 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 21\\ 3 & 4 & 9\\ 2 & -1 & 10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & 9\\ -1 & 10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ -1 & 10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ 4 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5, x_2=-1, x_3=1$.

Для того чтобы убедиться в правильности выполнения задания, необходимо найденные значения подставить в исходную систему вместо неизвестных и убедиться в тождественности полученных равенств.

Метод Гаусса

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований. К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Пример . Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2,\\4x-5y+2z=1,\\5x-6y+4z=3.\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\4&-5&2&1\\5&-6&4&3\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-4)\\\times(3)^{+}\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}\times 5\\+\\\times 3\end{matrix}\right.\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&-3&2&-1\end{array}\right)\begin{matrix}\\\times(-1)\\+\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&0&4&4\end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2,\\-3y-2z=-5,\\4z=4.\end{cases}\qquad\begin{matrix}x=1,\\y=1,\\z=1.\end{matrix}$$

Ответ. (1,1,1)

Задания для самостоятельного решения.

Решить системы уравнений методом Крамера и Гаусса (сделать проверку)

Вариант 1

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_1-x_2+x_3=6}\\\boldsymbol{x_1-2x_2+x_3=9}\\\boldsymbol{x_1-4x_2-2x_3=3}\end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases}\boldsymbol{3x_1+x_2+3x_3=2}\\\boldsymbol{25x_1-2x_2+2x_3=1}\\\boldsymbol{2x_1+2x_2+3x_3=1}\end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Когда система уравнений имеет решение?
2. Что такое расширенная матрица системы?
3. Какие преобразования над строчками называют равносильными?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 6

1.Название темы Чтение графиков функций
2.Учебные цели: отработать навыки исследования функций для построения графиков
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Пусть каждому числу *x* их некоторого множества *X* поставлено в соответствие одно и только одно значение *y*. Тогда говорят, что на множестве *X* задана функция: *y= f(x).*

Множество *X* называется *областью определения* функции и обозначается *D(y)*, а множество всех значений *y –областью значений* функции и обозначается *E(y).*

Функция называется *четной*, если f(–x)= f(x), ее график симметричен относительно оси Оу.

Функция называется *нечетной*, если f(–x)= – f(x), ее график симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией *общего вида*.

Монотонность функции y=*f(x)*.
Если *y′* >0 на *(а;в)* , то *f(x)* возрастает на *(а;в).*
Если *y′* <0 на *(а;в)* , то *f(x)* убывает на *(а;в).*

Экстремумы функции.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.
Теорема Ферма (необходимое условие для экстремума). Если точка x_0-точка локального экстремума для функции *f(x)*, то в этой точке производная равна нулю.
Точки области определения функции *f(x)*, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции.

Достаточное условие для экстремума. Пусть функция *f(x)*непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности. Тогда, если *f'(x)*меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0- точка локального экстремума(если с «+» на «-»-максимум, если же с «-» на «+» -минимум).

Пример . Исследовать функцию $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Решение.
1) Область определения функции: $D(y)=(-\infty,+\infty)$
2) Найдем критические точки функции. Имеем $y'=2x+2;$ $2x+2=0$; $x=-1$.
3) Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2)=-2<0$, $f'(2)=2>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty,-1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1,\infty)$-возрастает. При $x=-1$ функция имеет минимум, равный

$$f(-1)=f_{min}=(-1)^2+2(-1)-3=1-2-3=-4.$$

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1,\infty)$
$f'(x)$	-	**0**	+
$f(x)$	$\searrow$	$f_{min}=-4$	$\nearrow$

Ответ .
Функция возрастает на промежутке $(-1;+\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -1)$, $f_{min}=-4$.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.

Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2.$$

Вариант 2.

Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

Контрольные вопросы

1Сформулируйте теорему о монотонности функции.

2.Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремума функции

3.Какие точки называют критическими, точками экстремума?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 7

1.Название темы Построение графиков сложных функций
2.Учебные цели: отработать навыки исследования функций и построение графиков
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Построить график.

Комментарии к схеме:

1) Совокупность всех тех значений, которые принимает независимая переменная x функции y=f(x)

2) а) f(–x)= f(x)– функция четная (график симметричен относительно оси Оу)

б) f(–x)= – f(x) – функция нечетная (график симметричен относительно начала координат)

3) - с осью ОХ (у = 0)

- с осью ОУ (x = 0)

4) Найти производную f ′(x) данной функции f(x).

Найти критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции f′(x) равна нулю или не существует). Критические точки разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная f ′(x) сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

Определить знак производной на каждом из интервалов монотонности.

Если f ′(x)≥ 0, то f(x) возрастает на этом промежутке.

Если f ′(x)≤ 0, то f(x) убывает на этом промежутке.

Исследовать знак производной f ′(x) в окрестности точки x_0.

Если f ′(x) меняет знак при переходе через точку x_0 с «-» на «+», то в этой точке функция f(x) имеет минимум.

Если f ′(x) меняет знак при переходе через точку x_0 с «+» на «-», то в этой точке функция f(x) имеет максимум.

Если f ′(x) не меняет знак при переходе через точку x_0 , то в этой точке функция f(x) не имеет экстремумов.

5) Найти вторую производную f ″(x) данной функции f(x).

Найти критические точки второго рода (внутренние точки области определения, в которых вторая производная функции f ″(x) равна нулю или не существует).

Критические точки второго рода разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная f ″(x) сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами выпуклости.

Определить знак второй производной на каждом из интервалов выпуклости.

Если f ″(x)> 0, то график функции f(x) выпуклый вниз.

Если f ″(x)< 0, то график функции f(x) выпуклый вверх.

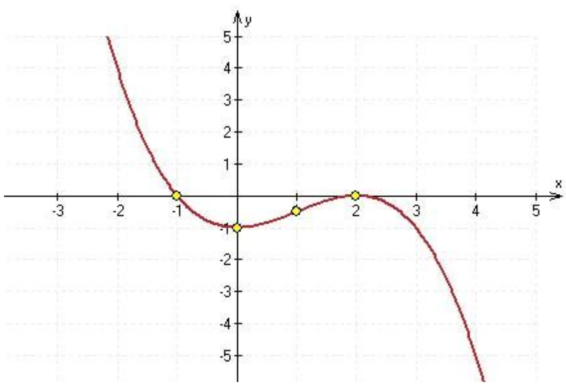
Если f ″(x) меняет знак при переходе через критическую точку второго рода, то эта точка будет точкой перегиба графика функции.

6) Отметить данные полученные в ходе исследования, добавить при необходимости некоторое количество точек.

Пример. Исследовать функцию средствами и построить ее график

$$y = \frac{-1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)$$

Решение.

1. Область определения функции (множество возможных значений x)	D(y)=(-∞;+∞)
2. Координаты точки пересечения с осью Oy	$y(0) = \frac{-1}{4}(0^3 - 3 \times 0^2 + 4) = -1$ Точка пересечения с осью Oy : (0;-1)
3. Исследование функции на монотонность	$y' = \frac{-1}{4}(3x^2 - 6x)$, y'=0 $3x^2$-6x=0 x=0 или x=2 При x∈(-∞;0)∪(2;+∞) – функция убывает, при x∈(0;2) – функция возрастает
4. Определение точек экстремума функции	$y(0) = \frac{-1}{4}(0^3 - 3 \times 0^2 + 4) = -1$ (0;-1) – точка минимума $y(2) = \frac{-1}{4}(2^3 - 3 \times 2^2 + 4) = 0$ (2;0) – точка максимума
5. Исследование функции на выпуклость и вогнутость	$y'' = \frac{-3}{4} \times 2x + \frac{3}{2} = 0$ $y''=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{2} = 0$; x=1
6. Определение точек перегиба функции	$y(1) = \frac{-1}{4}(1^3 - 3 \times 1^2 + 4) = -0{,}5$ (1;-0,5) – точка перегиба
7. Определение координат дополнительных точек	$y(-1) = \frac{-1}{4}((-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4) = 0$; (-1;0) $y(3) = \frac{-1}{4}(3^3 - 3 \times 3^2 + 4) = -1$; (3;-1)
8. Построение графика	

Задания для самостоятельного решения

Исследовать функцию с помощью производной и построить график

Вариант 1. $y = x^3-6x^2+9x-3$ *Вариант 2.* $y= 2-3x+x^3$

Контрольные вопросы

1.Расскажите общую схему исследования функции.
2.Как найти интервалы выпуклости графика функции?
3.Как найти интервалы монотонности функции и точки экстремума?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 8

1.Название темы Нахождение производных
2.Учебные цели: закрепить умения и навыки нахождения производных
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c'=0$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(kx+b)'=k$	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(e^x)'=e^x$	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)'=a^x\ln a$		
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$		
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$		

Правила вычисления производных:

$$1.\ (x\pm y)'=x'\pm y',\qquad 2.\ (xy)'=x'y+xy',\qquad 3.\ \left(\frac{x}{y}\right)'=\frac{x'y-xy'}{y^2}.$$

Примеры.

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных

а) $y=5x^3+\dfrac{6}{x^4}-2$ б) $y=\ln x\cdot\cos x$ в) $y=\dfrac{e^x}{5^x}$

Решение:

а) Вначале применяем правило 1 дифференцирования суммы функций. Далее применяем формулы из таблицы производных.

$$y'=\left(5x^3+\frac{6}{x^4}-2\right)'=\left(5x^3\right)'+\left(\frac{6}{x^4}\right)'-(2)'=5(x^3)'+6\left(x^{-4}\right)'-(2)'=$$

$$=5\cdot 3\cdot x^{3-1}+6\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}-0=15x^2-24x^{-5}=15x^2-\frac{24}{x^5}$$

б) Сначала применяем правило 2 дифференцирования произведения двух функций.Далее воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных.

$$y'=(\ln x\cdot\cos x)'=(\ln x)'\cdot\cos x+\ln x\cdot(\cos x)'=\frac{1}{x}\cdot\cos x+\ln x\cdot(-\sin x)=$$

$$=\frac{1}{x}\cos x-\ln x\cdot\sin x.$$

в) Применяем правило 3 дифференцирования частного двух функций. После этого воспользуемся соответствующими формулами таблицы производных

$$y'=\left(\frac{e^x}{5^x}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\cdot 5^x-e^x\cdot\left(5^x\right)'}{\left(5^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot 5^x-e^x\cdot 5^x\ln 5}{\left(5^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x\cdot 5^x(1-\ln 5)}{\left(5^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot(1-\ln 5)}{5^x}$$

<u>Ответ:</u> *а)* $15x^2-\dfrac{24}{x^5}$; б) $\dfrac{1}{x}\cdot\cos x-\ln x\cdot\sin x$; в) $\dfrac{e^x\cdot(1-\ln 5)}{5^x}$

Задания для самостоятельной работы

Найти производные функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y=2x^3+3^x+3-2\ln x$ 2. $y=\cos x\cdot(\sin x+x^2)$ 3. $y=\dfrac{e^x}{x^2}$	1. $y=4x^2+4^x+3e^x-\ln x$ 2. $y=\left(e^x+3x^5-4x\right)\cdot\sin x$ 3. $y=\dfrac{4^x}{x+1}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции.
2. Назовите производные основных элементарных функций

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 9

1.Название темы Вычисление производных высших порядков
2.Учебные цели: закрепить умения и навыки нахождения производных
3. Продолжительность занятия: 2 часа
4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке x своей области определения, то ее производная f'(x) есть функция от x. Функция $y=f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную, которую называют производной *второго порядка* функции $y=f(x)$ (*или второй производной*) и обозначают символом $f''(x)$. Таким образом

$$f''(x)=(f'(x))'$$

Пример 1. Найти вторую производную функции $y(x)=4x^3-8x+9$
Решение. Для начала найдем первую производную:

$$y'(x) = (4x^3-8x+9)'=12x^2-8$$

Затем находим производную от производной

$$y''(x)= (12x^2-8)'= 24x.$$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = 9x^2-x^6$.
Решение.
$y'=(9x^2-x^6)'=18x-6x^5$; $y''=(18x-6x^5)'=18-30x^4$, $y'''=(18-30x^4)'= -120x^3$.

Производные более высоких порядков определяются аналогично. То есть производная *n-го* порядка функции $f(x)$ есть первая производная от производной *(n−1)-го* порядка этой функции:

$$f^{(n)}(x) =(f^{(n-1)}(x))'$$

Механический смысл второй производной

Если точка движется прямолинейно и задан закон ее движения $s=f(t)$, то *ускорение* точки равно второй производной от пути по времени:

$$a(t)=s''(t)$$

Ускорение материального тела равно первой производной от скорости, то есть:

$$a(t)=v'(t)$$

Пример 3. Материальная точка движется по закону $s(t)=2t^3+3t$, где s измеряется в метрах, а t- в секундах. Найти значение t, при котором ускорение точки равно 12.

Решение. Найдем ускорение материальной точки:

$$a(t)=s''(t)=(2t^3+3t)''=((2t^3+3t)')'=((2t^3)'+(3t)')'=$$
$$=(2\cdot 3t^2+3\cdot 1)'=(6t^2+3)'=(6t^2)'+(3)'=12t$$

Искомое время t найдем из уравнения:

$$a(t)=12\Rightarrow 12t=12\Rightarrow t=1c$$

Ответ. t=1c

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти производную второго порядка для следующих функций:
а) $y=7x-1$ б) $y=\sin x$ в) $y=\sqrt[3]{x}$
2. Найти y''', если $y=4x^3-5x$
3. Точка движется по закону $S(t)=2t^3-4t^2+2t-9$. Найти ускорение точки через 3с.

Вариант 2

1. Найти производную второго порядка для следующих функций:
а) $y=724x-x^2$ б) $y=4\sin x$ в) $y=\sqrt[5]{x}$
2. Найти y''', если $y=5\cos x+4x$
3. Точка движется по закону $S(t)=4t^3-4t^2-2t+7$. Найти ускорение точки через 2с.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции второго порядка.
2. Назовите по какому правилу находятся производные *n-го* порядка?
3. Сформулируйте механический смысл производной

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 10

1.Название темы Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

2.Учебные цели: научиться решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.

2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее или наименьшее значения величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Для решения такой задачи следует, исходя из ее условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значения полученной функции. При этом интервал изменения независимой переменной также определяется из условия задачи.

Сформулируем *алгоритм определения наибольшего и наименьшего значения функции непрерывной в некотором промежутке:*

1. Найти критические точки, принадлежащие данному промежутку.
2. Найти значения функции в критической точке и на концах промежутка.
3. Сравнить полученные значения и выбрать наибольшее или наименьшее.

Задача 1. Из всех прямоугольников с одинаковым периметром найти тот, у которого площадь наибольшая.

Решение. Пусть периметр прямоугольника равен 12, длину одной стороны обозначим через x, тогда другая сторона будет равна (12 – 2x)/2=6 - x.

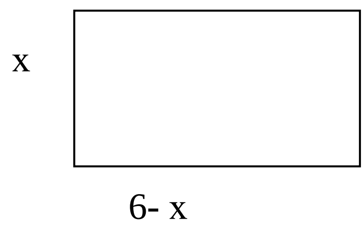
Площадь прямоугольника равна $S= a\cdot b$

Составляем функцию $S(x)= (6-x)\cdot x= 6x - x^2$.

Находим критические точки: $S'(x) = 0$.

$S'(x) = (6x -x^2)'= 6(x)' – (x^2)'= 6 – 2x$.

$S'(x) =0$, $6 - 2x=0$, $x=3$



Вычисляем значения функции в критической точке и на концах отрезка [2; 4]

$S(3)= 6\cdot 3-3^2 = 18-9=9$

$S(2)= 6\cdot 2-2^2 = 12-4=8$

$S(4)= 6\cdot 4-4^2 = 24-16=8$

Сравнивая эти значения, заключаем: наибольшая площадь равна 9.

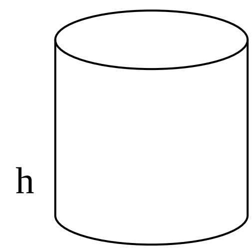
Значит, одна сторона прямоугольника равна 3, а другая 6-3=3, то есть данный прямоугольник является квадратом .

Ответ. Наибольшая площадь будет у квадрата со стороной 3.

Задача 2. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с вертикальной боковой поверхностью заданного объема V=64. Каковы должны быть размеры ямы (радиус R и высота h), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

Решение. Поверхность ямы цилиндрической формы состоит из основания и боковой поверхности

$$S = S_{осн} + S_{бок}\text{, где } S_{осн} =\pi R^2 , S_{бок} = 2\pi Rh.$$



Выберем за независимую переменную радиус основания и выразим через эту переменную площадь поверхности ямы, используя формулу объема цилиндра $V= \pi R^2 h$

$$R = x , h = \frac{V}{\pi R^2}, \quad h = \frac{64}{\pi x^2}$$

Составляем функцию $S(x)= \pi x^2 + 2\pi x \frac{64}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{128}{x}$

Находим критические точки функции S(x), решая уравнение S'(x)=0

$S'(x)= \pi(x^2)' + 128 (1/x)'= 2\pi x- \frac{128}{x^2}$

Приравнивая производную к нулю, получаем уравнение

$2\pi x - \frac{128}{x^2} = 0$, $2\pi x^3 - 128 = 0$, $x^3 = \frac{64}{\pi}$, $x = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}}$, $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

Эта точка принадлежит отрезку $[2; 3]$

Вычисляем значения функции S(x) в найденной точке и на концах промежутка

$S\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) \approx 70{,}29$; $S(2) \approx 76{,}56$; $S(3) \approx 70{,}96$

Сравнивая эти значения, заключаем: наименьшее значение S достигается во внутренней точке $x=4/\sqrt[3]{\pi}$.

Таким образом, радиус основания $R=4/\sqrt[3]{\pi}$, а высота $h= 64/\pi x^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$.

Ответ. Радиус основания и высота ямы равны $4/\sqrt[3]{\pi}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант	**Задача**
1	Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
2	Решеткой длиной 108 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Найти размеры площадки.
3	Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5дм и 8 дм. В четырех углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?
4	Необходимо изготовить закрытый цилиндрический бак объемом 64 $м^3$. Какими должны быть его радиус и высота, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений
2. Запишите формулы вычисления площади прямоугольника, поверхности прямоугольного параллелепипеда.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах

8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 11

1.Название темы Нахождение неопределенных интегралов
2.Учебные цели: научиться вычислять интегралы методом непосредственного и интегрирования

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b$$

Совокупность всех первообразных функций *F*(x) + c для функции *f*(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а С -произвольной постоянной интегрирования.
Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x$ +C;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ +C; $(n \ne -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$ +C;
4. $\int e^x dx = e^x$ +C;

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$ +C;

6. $\int \sin x dx = -\cos x$ +C;

7. $\int \cos x dx = \sin x$ +C;

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx$ +C;

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$ +C;

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ +C;

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$ +C;

16. $\int \ln x dx = x \ln x - x$ +C;

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример. Вычислить: 1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$; 2) $\int \dfrac{(x+2)^3 dx}{x}$;

Решение.

1) $\int(5x^4-4x^3+3x^2-1)dx=5\int x^4dx-4\int x^3dx+3\int x^2dx-\int dx=x^5-x^4+x^3-x+C$;

2) $\int\frac{(x+2)^3dx}{x}=\int\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}dx=\int(x^2+6x+12+\frac{8}{x})dx=\frac{1}{3}x^3+3x^2+12x+8\ln|x|+C$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1.Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(2x^2+7x-1)dx$; б) $\int\frac{(2-3x)^2}{x^3}dv$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

а) $\int(4x^4-8x^3+\sqrt{x})dx$; б) $\int\frac{(1-4x)^2}{x^4}dx$;

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, $x\in(a;b)$?

2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?

3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

4. Перечислите основные табличные интегралы.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 12

1.Название темы Вычисление площадей плоских фигур
2.Учебные цели: научиться вычислять площади плоских фигур с помощью определенных интегралов

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям
5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

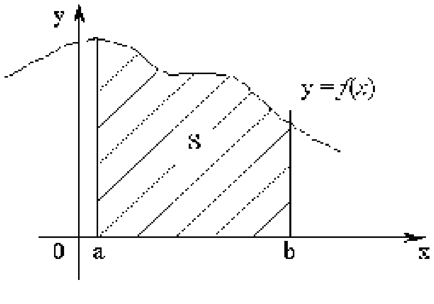
Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Определенный интеграл

Определение. Разность F (b)– F (a) называется определенным интегралом от функции *f (x)* на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx =$F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл интеграла.

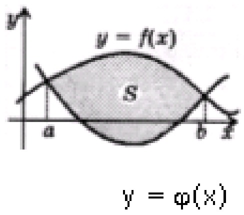


Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ох и прямыми x=a и x=b:

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Вычисление площадей с помощью интеграла

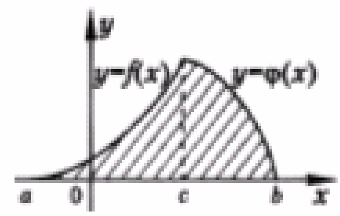
1.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций *f (x)* и $\varphi(x)$:



$$S=\int_a^b (f(x) - \quad (x))dx$$

2.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций

f (x), $\varphi(x)$ и осью Ox:

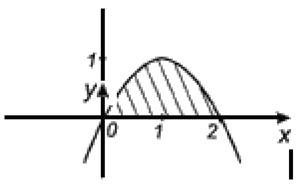


$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \varphi(x)dx.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

f(*x*) = 2 *x* – *x* ^{2} и осью абсцисс

*Решение***.** Графиком функции f(x) = 2x - x^2 является парабола. Вершина находится в точке (1; 1).



$$S=\int_0^2 (2x-x^2)dx=(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=(4-\frac{8}{3})-0=1\frac{1}{3}\text{(кв. ед.)}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) У= 4x+6, x=1 и x= 8
2) У= 4-x^2 и y=0
3) У= x^2+1, x=1 и x=3

Контрольные вопросы

1.Запишите формулу Ньютона- Лейбница .
2. Что называется определенным интегралом?
3. Что называется криволинейной трапецией?

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки

Практическое занятие 13

1.Название темы Действия над комплексными числами.

2.Учебные цели: научиться выполнять действия над комплексными числами

3. Продолжительность занятия: 2 часа

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1.Богомолов Н.В. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. -5-е изд., пер. и доп. -М. ИздательствоЮрайт, 2019.-401с. – (Серия : Профессиональное образование). ISBN 978-5-534-07878-7

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1.Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.
3.После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Задание. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Вычислить: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $z_1 : z_2$; д) представить число z_1 в тригонометрической форме; е) вычислить $\sqrt{z_1}$.

Решение.

а) $z_1+z_2 =(1+i)+(\sqrt{3}+i)=(1+\sqrt{3})+2i\approx 2,7+2i$

б) $z_1-z_2 =(1+i)-(\sqrt{3}+i)=(1-\sqrt{3})+0i\approx -0,7$

в) $z_1\cdot z_2=(1+i)\cdot(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i\sqrt{3}+1i+i^2=\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)-1=(\sqrt{3}-1)+$
$+i(\sqrt{3}+1)\approx 0,7+2,7i$

г) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1i-i^2}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{3+1}\approx\frac{2,7+0,7i}{4}\approx 0,675+0,175i$

д) для того, чтобы представить число z_1=1+i в тригонометрической форме, необходимо найти модуль этого числа **r** и его аргумент $\boldsymbol{\varphi}$ *по формулам:*
$r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\alpha=arctg\frac{b}{a}$ ($\varphi=\alpha$, т.к. вектор комплексного числа z_1 лежит в1 четверти).

Примечание. Если вектор комплексного числа лежит во 2 четверти, то $\varphi=\pi-\alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 3 четверти, то $\varphi=\pi+\alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 4 четверти, то $\varphi=2\pi-\alpha$,

z_1=1+i=$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \to r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\varphi=\alpha=arctg\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}$

Так как тригонометрическая форма комплексного числа записывается формулой
$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то для нашего числа получаем:$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.
е) используем формулы:

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

Т.к. в нашем случае n=2, то k=0;1;$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, то получим:

$$z_0=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi 0}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi 0}{2})=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$$

$$z_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\times 1}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\times 1}{2})=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8})$$

Задания для самостоятельного решения

Даны комплексные числа z_1 и z_2. Вычислить: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) $z_1\cdot z_2$; г) $z_1:z_2$; д) представить число z_1 в тригонометрической форме; е)$\sqrt{z_1}$.

1	$z_1=3+3i$ $z_2=-2+2\sqrt{3}i$	2	$z_1=-2+2\sqrt{3}i$ $z_2=-1+i$	3	$z_1=2-2i$ $z_2=\sqrt{3}-i$	4	$z_1=-\sqrt{3}-i$ $z_2=1-i$	5	$z_1=-1+i$ $z_2=-\sqrt{3}+i$
6	$z_1=1-\sqrt{3}i$ $z_2=2-2i$	7	$z_1=\sqrt{3}-i$ $z_2=3+3i$	8	$z_1=1-i$ $z_2=2-2\sqrt{3}i$	9	$z_1=-\sqrt{3}+i$ $z_2=-1+i$	10	z_1=$2-2\sqrt{3}i$ z_2=$\sqrt{3}-i$

Контрольные вопросы

1 Какие комплексные числа называют равными; сопряженными?
2 Как изображаются комплексные числа геометрически?
3 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
4 Перечислите формы записи комплексного числа.

7.Форма отчета: Выполните задания на листах
8. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки